UNE ÉQUATION POLYNOMIALE

Deux niveaux de difficulté/longueur :

— Piste bleue : questions **1)** à **6)**.

— Piste rouge : tout le devoir.

Soient $a, b \in \mathbb{C}$ fixés une fois pour toutes. Pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, on dit que P est *solution d'*★ si $P\left(X^2\right) = P(X+a)P(X+b)$.

Quand on parle de racines dans ce problème, il s'agit toujours de racines dans $\mathbb{C}$.

Pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, on note $\overline{P}$ le polynôme dont les coefficients sont les conjugués de ceux de P. On **ADMET** que pour tous $P, Q \in \mathbb{C}[X]$: $\overline{P+Q} = \overline{P} + \overline{Q}$, $\overline{P \times Q} = \overline{P} \times \overline{Q}$ et $\overline{P \circ Q} = \overline{P} \circ \overline{Q}$.

1) Déterminer les solutions d'★ constantes.

On note à présent $\mathscr{E}$ l'ensemble des solutions d'★ non constantes.

2) Montrer que tout élément de $\mathscr{E}$ est unitaire et que $\mathscr{E}$ est stable par produit.

3) On suppose dans cette question que $a = b$.

a) Soit $P \in \mathscr{E}$. On note r le nombre de racines distinctes de P. Combien $P(X+a)^2$ possède-t-il de racines distinctes ? Et $P\left(X^2\right)$? En déduire que 0 est la seule racine de P.

b) En déduire, en fonction de a, une description explicite de l'ensemble $\mathscr{E}$.

4) Soient $P, Q \in \mathscr{E}$ de mêmes degrés. On pose $D(X) = P(X) - Q(X)$, puis $R(X) = P(X+a)D(X+b) + D(X+a)Q(X+b)$.

a) Montrer que $\deg(R) = \deg(P) + \deg(D)$.

b) Vérifier que $D\left(X^2\right) = R(X)$. En déduire que $P = Q$.

5) Déduire du résultat de la question **4)** que si a et b sont réels, alors $\mathscr{E} \subset \mathbb{R}[X]$.

6) On suppose dans cette question que $a = 0$ et $b = -1$. Soit $P \in \mathscr{E}$.

a) Montrer que pour toute racine α de P et pour tout $n \in \mathbb{N}$, α^{2^n} est racine de P.

b) En déduire que pour toute racine α de P : $\alpha = 0$ ou $|\alpha| = 1$.

c) En déduire que 0 n'est pas racine de P.

d) Montrer que pour toute racine α de P : $|\alpha + 1| = 1$.

e) Montrer que $P = \left(X^2 + X + 1\right)^n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$.

f) En déduire une description explicite de l'ensemble $\mathscr{E}$.

La fin du problème est consacrée à une description générale de l'ensemble $\mathscr{E}$, que l'on suppose désormais non vide.

7) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{C}$: $a^n - b^n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \left(a - e^{\frac{2ik\pi}{n}} b\right)$.

b) En déduire que pour tous $A, B \in \mathbb{C}[X]$: $A^n - B^n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \left(A - e^{\frac{2ik\pi}{n}} B\right)$.

c) En déduire que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$ unitaire : $P^n \in \mathscr{E} \implies P \in \mathscr{E}$.

8) Justifier l'existence d'un unique polynôme M de degré minimal dans $\mathscr{E}$.

On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les racines distinctes de M et $m_1, \ldots, m_r$ leurs multiplicités respectives, de sorte que $M = \displaystyle\prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{m_i}$.

9) Soit $P \in \mathscr{E}$. On pose $d = \deg(P) \wedge \deg(M)$ et on note s et t les deux entiers premiers entre eux pour lesquels $\deg(P) = ds$ et $\deg(M) = dt$.

a) Montrer que $P^t = M^s$, puis que pour certains $p_1, \ldots, p_r \in \mathbb{N}^*$: $P = \displaystyle\prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{p_i}$.

On pose alors $Q = \displaystyle\prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{m_i \wedge p_i}$.

b) Montrer que $P = Q^s$ et $M = Q^t$, puis que P est une puissance de M.

Les résultats des questions **2)** et **9)** montrent finalement que $\mathscr{E} = \left\{ M^n \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$.